STUDIO DI FUNZIONE

Data $y=f(x)$, se ne determina il grafico con lo schema:

DETERMINAZIONE DELL'INSIEME DI ESISTENZA

- **denominatori** $\Rightarrow$ porre $\neq 0$
- argomenti delle **radici di ordine pari** $\Rightarrow$ porre ≥ 0
- argomenti dei **logaritmi** $\Rightarrow$ porre >0
- basi di **potenze** ad esponente $\in \mathbb{Q}^+$ $\Rightarrow$ porre ≥ 0
- " $\in \mathbb{Q}^-$ $\Rightarrow$ porre >0
- " p/q con q dispari $\Rightarrow$ tutto $\mathbb{R}$
- argomenti di **arcsen** e **arccos** $\Rightarrow$ fra -1 e 1.

Dominio di f = le x che verificano <u>tutte</u> le condizioni.

DETERMINAZIONE DI PERIODICITÀ E SIMMETRIE

- f **periodica** con periodo P, $k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow f(x)=f(x+kP)$

  $[f_1 \text{ con } P_1,\ f_2 \text{ con } P_2 \Rightarrow f_1+f_2 \text{ con mcm}(P_1,P_1)]$
- f **pari** (simm. risp. all'asse y) $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$
- f **dispari** (simm. risp. all'origine) $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$

$\Rightarrow f$ nota in interv. corrisp. per periodicità o simmetria.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI COORDINATI

- con l'**asse x**: $\Rightarrow f(x)=0$ (sono gli zeri di f)
- con l'**asse y**: $\Rightarrow y=f(0)$ (si pone $x=0$).

STUDIO DEL SEGNO

Si risolve $f(x)>0$ tenendo presente che:

- $\sqrt[2n]{g(x)}\geq 0,\ a^{g(x)}>0,\ [g(x)]^{2n}>0,\ |g(x)|\geq 0$ $\Rightarrow$ sempre
- $\log g(x)>0$ $\Rightarrow$ per $g(x)>1$
- $\arcsin g(x)>0, \operatorname{arctg} g(x)>0$ $\Rightarrow$ per $g(x)>0$
- $\arccos g(x)>0$ $\Rightarrow$ nel CE: $[-1,1]$

CALCOLO DEI LIMITI NEI PUNTI OPPORTUNI

In base ai risultati del punto , il limite va ricercato per:

- $x\to\pm\infty$ $\Leftrightarrow$ il dominio include $]-\infty,b]$ o $[a,+\infty[$;
- pti in cui $\nexists f$ $\Rightarrow$ studiare limite dx e/o sx.

L'andamento dev'essere compatibile a quello previsto.

DETERMINAZIONE DEGLI EVENTUALI ASINTOTI

- $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ $\Rightarrow x=c$ **as. verticale**;
- $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$ $\Rightarrow y=k$ **as. orizzontale**;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\Rightarrow y=mx+q$ **as. obliquo** sse <u>$\exists$ entrambi finiti</u> $m=\lim_{x\to\infty} f(x)/x$ e $q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(mx+q)]=\begin{cases}0^+\\0^-\\0\end{cases}\Rightarrow f\begin{cases}\text{sta sopra}\\\text{sta sotto}\\\text{oscilla}\end{cases}\text{rispetto all'as.}$$

$$x\to\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}\Rightarrow \text{l'asintoto è}\begin{cases}\text{destro}\\\text{sinistro}\end{cases}.$$

STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

$f'(x)>0\Rightarrow f$ **crescente**, $f'(x)<0\Rightarrow f$ **decrescente**.

Se x_0 è soluzione di $f'(x)=0$ e risulta, rispetto a x_0:

- $\left.\begin{matrix}f'(x)>0 \text{ a sx}\\ f'(x)<0 \text{ a dx}\end{matrix}\right| \Rightarrow x_0$ pto di **max** relat.
- $\left.\begin{matrix}f'(x)<0 \text{ a sx}\\ f'(x)>0 \text{ a dx}\end{matrix}\right| \Rightarrow x_0$ pto di **min** relat.
- $\left.\begin{matrix}f'(x)>0\\ f'(x)<0\end{matrix}\ \text{in un intorno}\right| \Rightarrow x_0$ pto di **flesso or.**

<u>**OVVERO**</u>

- $f''(x_0)<0$ $\Rightarrow x_0$ pto di **max** rel.
- $f''(x_0)>0$ $\Rightarrow x_0$ pto di **min** rel.
- $f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)>0$ $\Rightarrow x_0$ pto di **flesso or. asc.**
- $f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)<0$ $\Rightarrow x_0$ pto di **flesso or. disc.**
- $f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)=0$ $\Rightarrow$ sia n t.c. $f^{(n)}(x_0)\neq 0$:

n pari $\Rightarrow \begin{cases}f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di \textbf{min} rel.}\\ f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di \textbf{max} rel.}\end{cases}$

n disp. $\Rightarrow \begin{cases}f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di \textbf{flesso or. asc.}}\\ f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di \textbf{flesso or. disc.}}\end{cases}$

Ulteriori punti di max/min rel., tra <u>estremi del dominio</u> e <u>punti critici</u>, si trovano studiando la crescenza di f.

CALCOLO DI ATTACCHI E PUNTI CRITICI

L'*attacco* in $x=a$ si calcola solo quando si sa <u>da dove</u> parte f ma non si sa <u>come</u>, cioè:

- f definita in $x=a$ $\Rightarrow$ ma non nell'int. dx/sx di a;
- f non definita in $x=a$ $\Rightarrow$ ma $\lim_{x\to a} f(x)=b<\infty$.

L'inclinazione $\vartheta=\operatorname{arctg}(m)$ della tg al grafico in $(a,f(a))$ si trova calcolando $m=f'(a)$, ovvero $m=\lim_{x\to a^\pm} f'(x)$.

I *punti critici* sono quelli in cui $\nexists f'(x)$, ossia:

- $\lim_{x\to c^\pm} f'(x)=+\infty \Rightarrow x=c$ pto di **flesso a tg vertic. asc.**
- $\lim_{x\to c^\pm} f'(x)=-\infty \Rightarrow x=c$ pto di **flesso a tg vertic. disc.**
- $\lim_{x\to c^\pm} f'(x)=\pm\infty \Rightarrow x=c$ pto di **cuspide verso il basso**
- $\lim_{x\to c^\pm} f'(x)=\mp\infty \Rightarrow x=c$ pto di **cuspide verso l'alto**

- $f'_+(c)\neq f'_-(c)$ $\Rightarrow x=c$ pto **angoloso** $[f'_\pm$ finite$]$

- $\nexists$ il limite del rapporto incrementale $\Rightarrow$ $f(x)$ oscilla continuamente in ogni intorno di $x=c$.

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

$f''(x)>0\Rightarrow f$ **concava**, $f''(x)<0\Rightarrow f$ **convessa**.

Se x_0 è soluzione di $f''(x_0)=0$ e risulta, rispetto a x_0:

- $\left.\begin{matrix}f''(x)>0 \text{ a sx}\\ f''(x)<0 \text{ a dx}\end{matrix}\right| \Rightarrow x_0$ pto di **flesso disc.**
- $\left.\begin{matrix}f''(x)<0 \text{ a sx}\\ f''(x)>0 \text{ a dx}\end{matrix}\right| \Rightarrow x_0$ pto di **flesso asc.**

<u>**OVVERO**</u>

sia $n\geq 3$ t.c. $f^{(n)}(x_0)\neq 0$:

n disp. $\Rightarrow \begin{cases}f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di \textbf{flesso asc.}}\\ f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ pto di \textbf{flesso disc.}}\end{cases}$

n pari $\Rightarrow \begin{cases}f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow f(x) \text{ concava}\\ f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow f(x) \text{ convessa}\end{cases}$

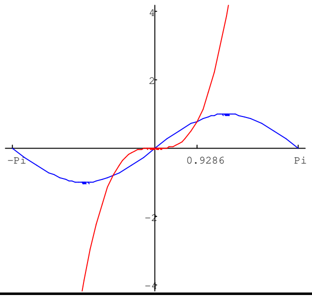
La tg in $(x_0,f(x_0))$ è inclinata di $\alpha=\operatorname{arctg}(f'(x_0))$. Ulteriori pti di flesso tra i pti in cui $\nexists f''(x)$ e i pti critici (flessi <u>a tg verticale</u>), si trovano studiando la concavità di f.

CALCOLO DI ULTERIORI PUNTI E VERIFICHE FINALI

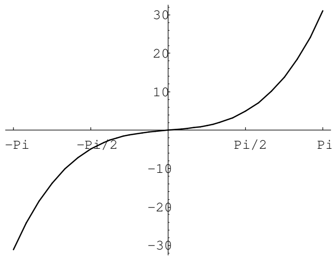
*N.B. Il disegno del **grafico** procede punto per punto!*

“ECONOMIA” NEI GRAFICI

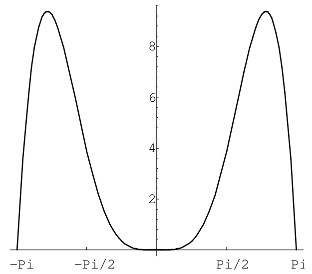
$f(x)=\text{sen}\,x,\ g(x)=x^3$



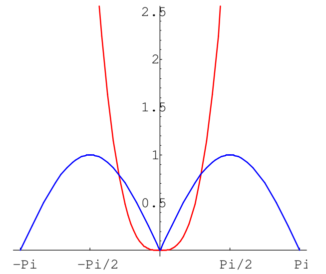
$f(x)+g(x)$



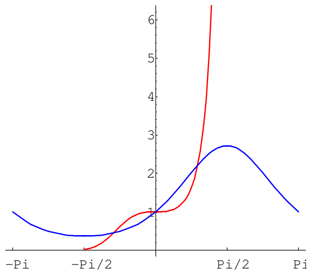
$f(x)\cdot g(x)$



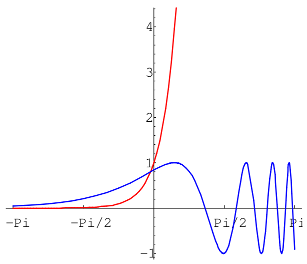
$|f(x)|, |g(x)|$



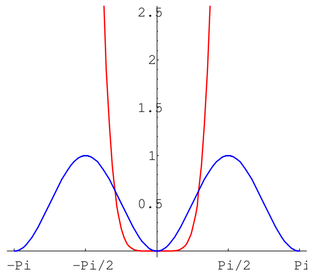
$\exp f(x), \exp g(x)$



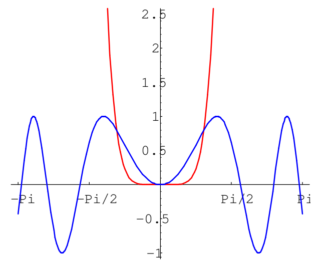
$f(\exp x), g(\exp x)$



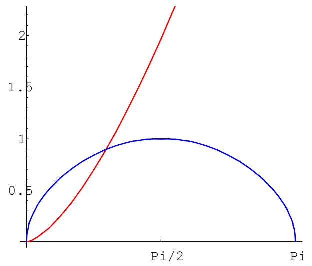
$f^2(x), g^2(x)$



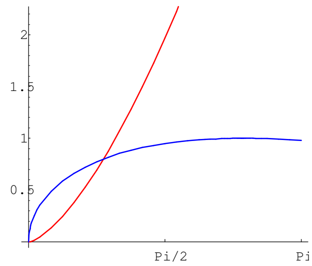
$f(x^2), g(x^2)$



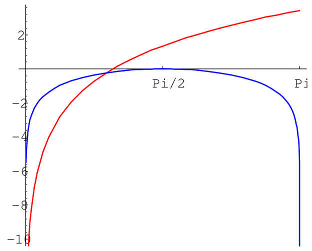
$\sqrt{f(x)}, \sqrt{g(x)}$



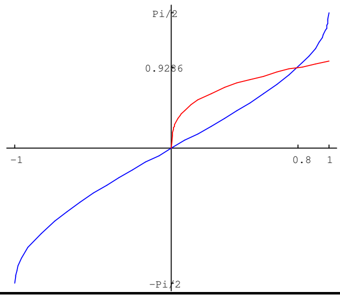
$f(\sqrt{x}), g(\sqrt{x})$



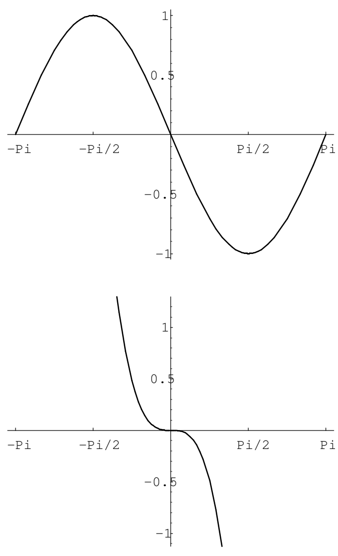
$\ln f(x), \ln g(x)$



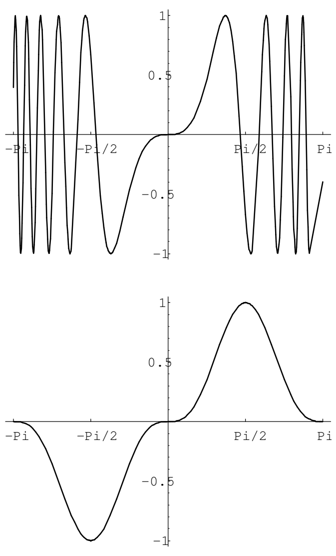
$f^{-1}(x)=\text{arcsen}\,x, g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$



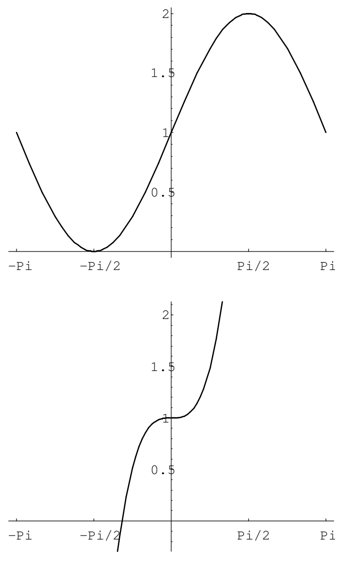
$-f(x), -g(x)$



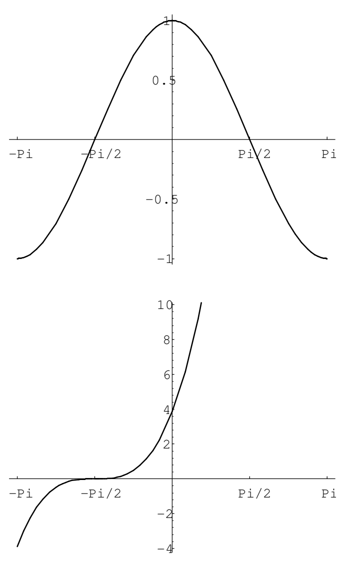
$f(g(x)), g(f(x))$



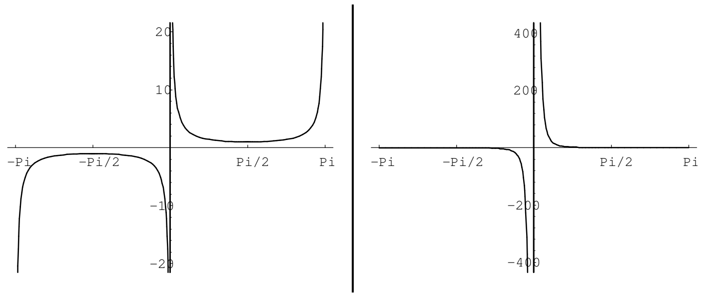
$f(x)+1, g(x)+1$



$f(x+\pi/2), g(x+\pi/2)$



$1/f(x), 1/g(x)$



$f(x)/g(x), g(x)/f(x)$