GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO

$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $r: ax+by+c=0$

PUNTO MEDIO DI AB	**RETTA PER A E B**
$M=\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$	$\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$

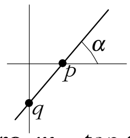
DISTANZA PUNTO-PUNTO

$$d(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

DISTANZA PUNTO-RETTA

$$d(A,r)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|y_A-(mx_A+q)|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{con } r: y=mx+q$$

EQUAZIONI DELLA RETTA



- *parametrica:* $\begin{cases} x=x_A+k\,x_B \\ y=y_A+k\,y_B \end{cases}$
- *esplicita:* $\boxed{y=mx+q}$ con **coeff. angolare** $m=\tan\alpha$
- *segmentaria:* $\boxed{\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1}$, con $p=-\dfrac{c}{a}=-\dfrac{q}{m}$ e $q=-\dfrac{c}{b}$.
- *cartesiana:* $\boxed{ax+by+c=0}$, con $-a/b=m$ e $-c/b=q$.

$\cap$ *asse*	*asse*	*// asse*	*bisettrice*	*per O*
x: p	*x:* $y=0$	*x:* $y=k$	*I-III:* $y=x$	$y=mx$
y: q	*y:* $x=0$	*y:* $x=h$	*II-IV:* $y=-x$	$ax+by=0$

FASCIO DI RETTE

dato A: $\lambda(x-x_A)+\mu(y-y_A)=0$ o $\boxed{y-y_A=m(x-x_A)}$

date r e r′ : $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, ovvero

$\boxed{ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0} \Rightarrow \lambda\alpha+\mu\beta=0 \Leftrightarrow$

$\mu/\lambda=-\alpha/\beta$ imponendo il passaggio per un pto

intersezione: 1 punto $\Rightarrow$ **proprio**
nessuna $\Rightarrow$ **improprio** (rette //)

perpendicolari: $aa'+bb'=0 \Leftrightarrow -\dfrac{a}{b}=\dfrac{b'}{a'} \Leftrightarrow \boxed{m=-\dfrac{1}{m'}}$

parallele: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow -\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow \boxed{m=m'}$

USO DELLE MATRICI

RETTA OA	**RETTA AB**
$\begin{vmatrix} x & y \\ x_A & y_A \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{vmatrix}$

***A B C* ALLINEATI** *ovvero:*	**AREA ABC**
$\mathcal{D}=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{vmatrix}$	$\mathcal{D}\neq 0 \Rightarrow S=\dfrac{\mathcal{D}}{2}$

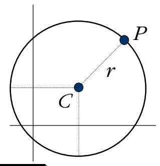
INTERSEZIONE FRA DUE RETTE *(FORMA IMPLICITA)*

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} A_{12}=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, A_{13}=\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, A_{23}=\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}$$

determinato $|A_{12}|\neq 0$ $\Rightarrow$ 1 pto (incidenti)
indetermin. $|A_{12}|=|A_{13}|=|A_{23}|=0$ $\Rightarrow \infty$ pti (coincid.)
impossibile $|A_{12}|=0$ e $|A_{13}|\neq 0$ o $|A_{23}|\neq 0$ $\Rightarrow$ 0 pti (parallele)

CONICHE CANONICHE

CIRCONFERENZA



Posti $P(x,y)$, $C(x_0,y_0)$:

definizione $\overline{PC}^2=r^2$

di centro $C(0,0)$ $x^2+y^2=r^2$

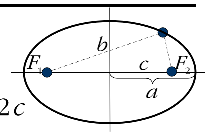
di centro $C(x_0,y_0)$ $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$

sviluppando si ha $x^2+y^2\underbrace{-2x_0}_{a}x\underbrace{-2y_0}_{b}y+\underbrace{x_0^2+y_0^2-r^2}_{c}=0$

equaz. generale $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$

coord. del centro	***raggio***
$x_0=-a/2$, $y_0=-b/2$	$x_0^2+y_0^2-c>0 \Rightarrow r=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$

ELLISSE



Posti $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $a\geq b>0$:

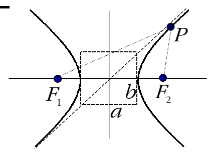
lungh. assi or. $=2a$, vert. $=2b$, focale $=2c$

vertici $(\pm a,0)$, $(0,\pm b)$

definizione $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$	***relazione*** $a^2-b^2=c^2$
equaz. generale $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$	***equaz. parametrica*** $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$ φ anomalia eccentrica
eccentricità $e=\dfrac{c}{a}<1$	***direttrice relativa a*** $F_{1,2}$* $d_{1,2}: x=\pm\dfrac{a^2}{c}=\pm\dfrac{a}{e}$

* altra def.: $\dfrac{\overline{PF_1}}{d(P,d_1)}=\dfrac{\overline{PF_2}}{d(P,d_2)}=e<1$; $d_{1,2}\perp F_1F_2$

IPERBOLE



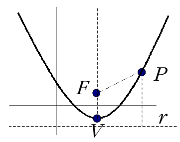
Posti $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $a,b>0$:

vertici $(\pm a,0)$

definizione $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$	***relazione*** $a^2+b^2=c^2$
equaz. generale $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$	***asintoti*** $y=\pm\dfrac{b}{a}x$
ip. equilatera $x^2-y^2=a^2$	***eccentricità*** $e=c/a>1$

Altra def. (direttrici v. ellisse): $\dfrac{\overline{PF_1}}{d(P,d_1)}=\dfrac{\overline{PF_2}}{d(P,d_2)}=e>1$

PARABOLA



Posto $P(x,y)$, F e r generici:

definizione $\overline{PF}=d(P,r) \Leftrightarrow \dfrac{\overline{PF}}{d(P,r)}=e=1$

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{fuoco} & F(0,1/4a) \\ \textbf{direttrice} & r: y=-1/4a \\ \textbf{asse} & x=0 \\ \textbf{vertice} & V(0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow y=ax^2$$

$$\begin{array}{l} y=ax^2+bx+c \\ \Delta=b^2-4ac \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{fuoco} & F(-b/2a,(1-\Delta)/4a) \\ \textbf{direttrice} & r: y=-(1+\Delta)/4a \\ \textbf{asse} & x=-b/2a \\ \textbf{vertice} & V(-b/2a,-\Delta/4a) \end{cases}$$

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

$$A(x_1,y_1,z_1),\, B(x_2,y_2,z_2),\, \pi: ax+by+cz+d=0$$

DISTANZA FRA DUE PUNTI

$$d(A,B)=\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

PUNTO MEDIO DI AB

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

DISTANZA PUNTO-PIANO

$$d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

EQUAZIONI DEL PIANO

- *parametrica:* $\begin{cases} x=x_0+hx_1+kx_2 \\ y=y_0+hy_1+ky_2 \\ z=z_0+hz_1+kz_2 \end{cases}$
- *cartesiana:* $ax+by+cz+d=0$, (a,b,c) vett. normale

piano	*// al piano*	*asse*	*// all'asse*
xy: $z=0$	xy: $z=k$	x: $y=0, z=0$	x: $a=0$
yz: $x=0$	yz: $x=k$	y: $x=0, z=0$	y: $b=0$
xz: $y=0$	xz: $y=k$	z: $x=0, y=0$	z: $c=0$

FASCIO DI PIANI

$$\lambda(ax+by+cz+d)+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

intersezione: 1 retta $\Rightarrow$ **proprio**
nessuna $\Rightarrow$ **improprio** (piani //)

STELLA DI PIANI

$$\lambda\pi+\mu\pi'+\nu\pi''=0$$

intersezione: 1 punto $\Rightarrow$ **propria**
nessuna $\Rightarrow$ **impropria** (piani // retta)

vett. direttore di r: (l,m,n) *vett. normale* a π: (a,b,c)

EQUAZIONI DELLA RETTA

- *parametrica:* $\begin{cases} x=x_0+kl \\ y=y_0+km \\ z=z_0+kn \end{cases}$ (l,m,n) *vett. direttore*
- *cartesiana:* $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$
- *ridotta:* $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

con *vett. dirett.* $\vec{v}=\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)$

RETTA PER A E B

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

perpendicolari	***parallele***
$ll'+mm'+nn'=0$	$\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}(=k)$

USO DELLE MATRICI

A B C D COMPLANARI *ovvero:*

$$\mathscr{D}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

VOLUME *ABCD*

$$\mathscr{D}\neq 0 \Rightarrow V=\frac{\mathscr{D}}{3}$$

PIANI

Piano per P parallelo a v e v':

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}=0$$

INTERSEZIONE FRA DUE PIANI

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

determin. $rg\,A=2$ b ∞^1 sol. (=1 retta con $\overset{r}{v}$)
indeterm. $rg\,A=rg\,A^+=1$ b ∞^2 sol. (=1 piano)
impossib. $rg\,A=1, rg\,A^+=2$ b 0 sol. (= piani //)

perpendicolari	***paralleli***
$aa'+bb'+cc'=0$	$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}(=k)$

RETTE

intersezione retta-retta: $\begin{array}{l} r \\ \\ s \end{array} \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \\ a'''x+b'''y+c'''z=0 \end{cases}$

determ. $rgA=rgA^+=3$ b 1 sol. (=1 pto, r. compl.)
indeterm. $rgA=rgA^+=2$ b ∞ sol. (= rette coincid.)
imposs.1 $rgA=3, rgA^+=4$ b 0 sol. (= rette sghembe)
imposs.2 $rgA=2, rgA^+=3$ b 0 sol. (= rette parallele)

RETTA PER P PARALLELA A V:

?? $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ $l,m,n\neq 0$

intersezione retta-piano:

$$\begin{array}{l} \pi \\ \\ r \end{array} \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \\ a''x+b''y+c''z=0 \end{cases}$$

determ. $rgA=rgA^+=3$ b 1 sol. (=r incidente π)
indeterm. $rgA=rgA^+=2$ b ∞ sol. (=r giace su π)
impossib. $rgA=2, rgA^+=3$ b 0 sol. (=r parallela a π)

perpendicolari	***paralleli***
$\dfrac{l}{a}=\dfrac{m}{b}=\dfrac{n}{c}(=k)$	$al+bm+cn=0$